Reflexions i propostes didàctiques per a un bon ensenyament i aprenentatge de la proporcionalitat geomètrica

Núria Cardet
Escola Joan Maragall, Lleida
mcardet@xtec.cat
Assumpta Estrada, María José Gros, Maria Ricart
Universitat de Lleida
aestrada@matematica.udl.cat, mj.gros@matematica.udl.cat,
maria.ricart@matematica.udl.cat

Resum

Moltes vegades, el treball de la proporcionalitat a les escoles i als instituts queda reduït a l'estudi de la proporcionalitat aritmètica i a l'aplicació del teorema de Tales. Pensem que la proporcionalitat geomètrica hauria d'adquirir un paper més important a les nostres aules i treballar-se més significativament amb activitats que promouen la resolució de problemes i la descoberta de l'entorn, ja que permet treballar no només continguts d'espai i forma, sinó també de càlcul i mesura. En l'estudi que es presenta s'analitzen les respostes d'un grup d'estudiants de primària i un grup de futurs mestres a un mateix problema que se'ls va formular després d'haver treballat les escales a l'escola i a l'aula universitària. Els resultats indiquen que els raonaments són similars.

Abstract

The study of proportionality is often reduced to arithmetical proportionality and to Thales' Theorem. We believe that geometrical proportionality should be one of the main goals in our classes and it should be learnt through meaningful activities, which facilitate problem-solving and research. Furthermore, geometrical proportionality allows us to not only work on the content of Geometry, but also that of Numbers and Operations and of Measurement. In this article we analyze the answers of a group of primary school students and of pre-service primary school teachers to the same problem, which was formulated after they had been learning about scales. Results show that their arguments are similar.

Introducció

Els resultats de la Prova d'Avaluació de Quart d'ESO 2015 realitzada a Catalunya van evidenciar que els alumnes, en acabar aquesta etapa educativa, tenen carències en coneixements sobre geometria. Aquest fet ens va provocar una primera reflexió que va desembocar a preguntar-nos sobre els continguts curriculars de la proporcionalitat geomètrica, que estudia les proporcions entre magnituds d'objectes geomètrics (Quintero, Molavoque i Guacaneme, 2012). Molts d'aquests estudiants es decantaran per estudis de grau d'Educació Primària i, en un futur, hauran de dur a terme processos d'ensenyament i aprenentatge en què hauran de treballar per desenvolupar el raonament proporcional dels seus alumnes.

La proporcionalitat, que no només és un contingut propi del cicle superior d'educació primària, sinó també de l'ESO, s'ha de treballar des de cursos inferiors. De fet, ja es fa (una multiplicació també ho és). Segons Fiol i Fortuny (1990), la proporcionalitat connecta i relaciona conceptes i problemes que es treballen des de primària fins a batxillerat: raó i proporció, fracció i nombre racional, canvi d'unitats, escales, mapes i maquetes, problemes d'aplicació de la regla de tres, de repartiments proporcionals, percentatges, gràfiques de funcions lineals, semblança de figures... Però el nom de proporcionalitat costa de sortir a les aules i la majoria de vegades els nostres alumnes només l'associen a la regla de tres, a un algorisme! Per què? Com es treballa la proporcionalitat? Buforn i Fernández (2014) conclouen que molts estudiants de grau d'Educació Primària, futurs mestres, es troben en un nivell de raonament preproporcional. Això justificaria que encara ara se segueixi utilitzant l'algorisme de la regla de tres, ja que, encara que no ajudi al desenvolupament del raonament proporcional, els estudiants arriben a respostes correctes (Lamon, 2007). Aquest fet es relaciona amb les investigacions de Fernández i Llinares (2012), que afirmen que estudiants capaços d'identificar i utilitzar les relacions multiplicatives en problemes proporcionals també les apliquen en situacions no proporcionals.

I la proporcionalitat geomètrica en particular? Com es treballa? Es treballa? Aquesta sí que es limita a l'aplicació del teorema de Tales i poc més, tot i que té continguts propis en el bloc d'espai i forma, tant en el currículum d'educació primària com en el de secundària, que van més enllà de Tales.

Arran d'aquestes reflexions es van triar quatre tasques sobre escales perquè les resolguessin tant estudiants de 6è de primària com estudiants de 2n del doble grau d'Educació Infantil i Primària amb l'objectiu de desenvolupar el seu raonament proporcional i identificar semblances i diferències en els raonaments i en les estratègies utilitzades. En aquest article s'analitzen i es comparen les respostes donades pels dos grups d'estudiants a la tasca final. A més a més, s'exposa la metodologia de treball de la proporcionalitat geomètrica utilitzada pels dos grups d'estudiants abans de realitzar-la.

Com van treballar la proporcionalitat geomètrica a l'escola? I a l'aula universitària?

Pensem que les activitats que presentem a continuació són un bon model per treballar la proporcionalitat geomètrica d'una manera significativa i contextualitzada a l'escola. També cal dir que estan relacionades amb els projectes que es treballaven a l'escola dels estudiants de 6è de primària dels quals hem analitzat les respostes: «L'escola» a 5è i «El barri» a 6è.

Totes les activitats es feren en petit grup o per parelles, tot i que el treball final, informe o comunicació, havia de ser individual. També es recollí el treball en murals i en fotografies.

La seqüència d'activitats fou:

- Dibuixar el plànol de l'escola a partir de les mesures preses amb el Google Maps (escala 1:100).
- Mesurar distàncies de mapes llegint les escales.
- Fer tapes de capses a escala. Construcció d'un mural per a veure-hi relacions.
- Ampliar figures quadriculades.
- Mesurar altures del pati aplicant el teorema de Tales.

La primera i la segona activitats es feren a 5è; a 6è es va tornar a treballar la segona i es portaren a terme les altres, de manera que s'havien d'anar recordant i connectant els aprenentatges anteriors.

El mestre ha d'adoptar el paper d'acompanyant i simular, en la mesura que sigui possible, que participa de la descoberta amb l'alumnat. També guiarà el treball ajudant a organitzar la informació en taules, a quantificar per facilitar les relacions numèriques que hi ha al darrere o al davant de qualsevol situació de proporcionalitat sigui o no geomètrica. Així, a poc a poc, s'anirà connectant coneixement, fent xarxa, i serà l'objectiu que entenguin en el sentit més ampli possible els conceptes i procediments que es treballen, per complexos que siguin.

Comentaris sobre les activitats

1. Dibuixem el plànol de l'escola

Mesurar amb el Google Maps va resultar fàcil, com també anotar les mesures en un esquema de les formes de quadrilàters dels quatre edificis de l'escola. La necessitat de mostrar els valors en figures, com més semblants millor a la realitat, va fer necessari introduir el concepte d'escala. Els metres reals serien centímetres al paper i així podríem fer-los semblants. Com que les figures a escala mesuraven prop de 90 cm, vam fer un mural on encabir i situar els edificis tenint en compte l'orientació i posant els noms als carrers que les limiten. Escala 1:100!

Després, individualment, dibuixaren algun edifici a escala i l'afegiren a la carpeta del projecte. Alguns alumnes en volgueren representar a escala 1:200 i descobriren que, com més gran és el nombre, la representació és més petita.

La majoria de l'alumnat féu bé aquesta activitat.

2. Mesurem distàncies amb mapes. Llegim escales

Presenta la dificultat de passar de centímetres a metres i a quilòmetres. També cal ensenyar a mesurar amb el regle (posant-lo bé) la distància entre dos punts i treballar amb decimals fins als dècims.

Com que es feia en petit grup i amb el suport de la calculadora, tots van fer bé els càlculs, van comparar distàncies i se'n van adonar si algun valor no era correcte.

3. Fem tapes de capses a escala. Construïm un mural

Aquesta activitat fou matemàtica i plàstica.

En una sessió plàstica es van repartir capses de cartró que s'havien de reproduir a escala 1:2 per grups. Primer van desmuntar-les i després van mesurar-les i van dividir per 2 la longitud dels costats. En una cartolina van construir la capsa nova. Com que l'objectiu era més plàstic que matemàtic, es féu la reflexió de quantes en cabrien sobre la tapa i quantes en cabrien a dins.

En la sessió més matemàtica es va partir de la tapa de la mateixa capsa i tots els grups, en folis de colors, van fer les reduccions proposades: 1:2, 1:3 i 1:4.

Com que a la classe som pocs alumnes, cada grup va poder fer més d'una reducció. No mostraven dificultat i era motivador.

Paral·lelament es va preparar el mural que havia d'ajudar a entendre'n el perquè.

Es va calcar la tapa i es va escriure l'escala 1:1 amb el diàleg previ que va comportar. Després es va calcar la tapa tres vegades més per poder enganxar les diferents reduccions. Se'ls va demanar que fessin les prediccions de quantes n'hi cabrien abans de dibuixar i, com era d'esperar, totes foren incorrectes. Certament, mentre enganxaven les reduccions, com es mostra a la figura 1, van anar corregint les prediccions i encertant-les.

S'adonaren que en la reducció 1:2 n'hi cabien 4, en la 1:3 n'hi cabien 9 i en la 1:4 n'hi cabien 16.

Sorgiren preguntes com:

Pot ser a escala «al revés»? 2:1 Què passaria? Hi cabria al dibuix de la tapa?

Per acabar aquesta activitat es va preguntar què passaria amb l'escala 1:10. També es va demanar que busquessin a la classe una representació d'aquesta escala i la van trobar: era el metre quadrat amb els dm^2 a dins!

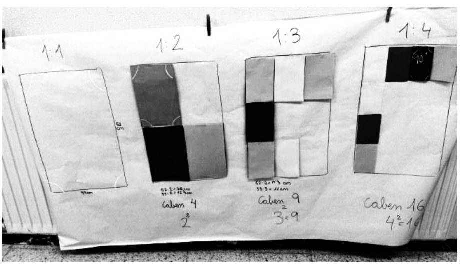

Figura 1. Mural de «Fem tapes de capses a l'escola».

4. Ampliem figures amb quadrícules

Aquesta activitat fou individual, encara que el treball final de cerca de regularitats es va fer en gran grup.

Volia respondre a la pregunta: Hi ha escales «sense l'1 al davant»?

Es va donar un full quadriculat a cada alumne i se li demanà que en un racó del full dibuixés una figura d'un nombre petit de quadrats (de 10 a 20). Després s'havia d'ampliar 2:1, 3:1, 4:1 fins a 5:1 si els cabia al paper.

Comptaven els costats dels quadrats del perímetre i els quadrats de la superfície i ho anotaven en una taula. Alguns alumnes van tenir dificultats en comptar el perímetre més que en comptar els quadrats de la superfície.

La taula de valors és la clau per adonar-se de les regularitats, de les relacions que hi ha entre els nombres i alhora facilita fer conjectures i generalitzar si es pot.

5. Mesurem altures del pati

Per finalitzar el tema de la proporcionalitat geomètrica calia parlar de Tales. Qui era? Per què fou conegut? Què podem aprendre'n?

Es va proposar de mesurar les ombres. Com que les ombres canviaven més ràpidament del que creien, calia algun referent: el metre de la pissarra.

Al pati vam posar el regle vertical, es va mesurar l'ombra i a terra, en guix, vam repassar l'ombra i vam escriure les fraccions que representaven les raons. Amb la calculadora es van fer els càlculs i així es va obtenir l'altura.

Per grups van triar altres elements del pati i en van mesurar indirectament l'altura amb el teorema.

Els futurs mestres van treballar a partir de l'espiral del coneixement de Wells (2004) i en un context d'avaluació formadora perquè «l'avaluació, entesa com a autoavaluació i coavaluació, constitueix forçosament el motor d'aprenentatge de tot el procés de construcció del coneixement» (Sanmartí, 2007, p. 23). En la primera fase de l'espiral, corresponent a compartir les experiències prèvies dels alumnes sobre el tema, els estudiants de grau van realitzar un pretest i un mapa conceptual sobre la proporcionalitat. A continuació, es van posar en comú les respostes dels estudiants i es va aprofitar per a repassar conceptes de proporcionalitat. A més a més, van fer un exercici d'autoregulació del pretest. Seguidament, en la segona fase de l'espiral, la de la «nova informació», van rebre instrucció per part de la professora sobre proporcionalitat geomètrica i sobre les escales en particular, i també van resoldre en grup quatre tasques sobre escales i semblança de polígons. Aquesta fase va acabar amb un procés de coavaluació intergrupal. La fase 3 de Wells va consistir en una posada en comú que va servir per a consolidar els nous aprenentatges; abans de dur-la a terme, els estudiants havien completat una rúbrica d'autoavaluació grupal. L'experiència va acabar amb un posttest i un nou mapa conceptual.

6. La tasca final

Per acabar l'experiència d'ensenyament i aprenentatge de la proporcionalitat, als nens i nenes de l'escola se'ls va plantejar el problema següent:

> Quina de les escales següents utilitzaries per a dibuixar en un full DIN A4 una casa de 7 m d'altura i 5 m d'amplada? Raona la resposta.
>
> 1:24 1:100 1:10000

L'última tasca dels futurs mestres va consistir no només a resoldre aquest problema, sinó també a analitzar les respostes donades pels estudiants de primària i a identificar quins continguts matemàtics hi ha implicats en el mateix problema.

Aquesta situació problema permet avaluar sobretot el nivell d'assoliment de la competència bàsica matemàtica «Donar i comprovar la solució d'un problema d'acord amb les preguntes plantejades» de la dimensió de resolució de problemes i treballar el raonament espacial, a més a més dels nombres decimals.

Anàlisi i discussió

Les respostes es van classificar en les categories següents segons el tipus de raonament:

- No es justifica l'escala elegida.
- D'índole qualitativa: relacionen la mida del dibuix amb el número de l'escala que representa els centímetres de la realitat a què equival 1 cm del dibuix.
- Naturalesa dels nombres i idea d'exactitud: en aquesta categoria hi ha les respostes dels estudiants que utilitzarien l'escala 1:100 perquè les mides de la representació de la casa a escala serien 5 cm $\times$ 7 cm, nombres naturals. En canvi, si utilitzen l'escala 1:24, han d'arrodonir el resultat (20,8 cm $\times$ 29,2 cm).
- Justifiquen la resposta tenint en compte si la representació de la casa els cabrà al full.

Taula 1. Raonaments dels estudiants.

Categoria	*Estudiants 6è primària*	*Estudiants de 2n grau*
	Freqüència absoluta ($N = 20$)	Freqüència ($G = 9$)
No justifica	5	0
Índole qualitativa	8	0
Naturalesa dels nombres i idea d'exactitud	2	3
Dimensions del DIN A4	2	5
Altres	3	1

A la taula 1 es pot veure que hi ha cinc nens i nenes de primària que no justifiquen la resposta: o bé han encerclat l'escala que utilitzarien o bé no n'han encerclat cap, però no argumenten la resposta en cap cas. Això no obstant, un dels estudiants de primària que no ha triat cap escala, sota la pregunta ha fet un dibuix d'una casa tal com es mostra a la figura 2.

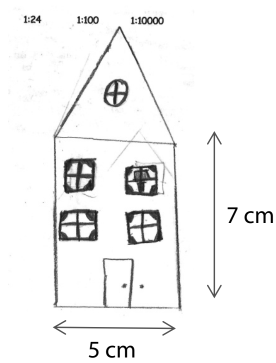

Figura 2

Concretament, el rectangle gran té 7 cm d'altura i 5 cm de base, cosa que fa pensar que el nen ha intentat reproduir la casa a escala 1:100. Els costats del triangle mesuren, aproximadament, també 5 cm. Per tant, aquest nen no ha estat capaç d'elegir una escala i raonar la resposta, però sembla que entén el concepte d'escala i sap representar a escala.

Un 33% dels estudiants de primària presenta la justificació incorrecta següent d'índole qualitativa (figura 3) per raonar que utilitzarien l'escala 1:10000: afirmen que, com més gran és l'escala, més petit és el dibuix. Aquest raonament, segurament, prové del descobriment que feren en l'activitat de dibuixar el plànol de l'escola.

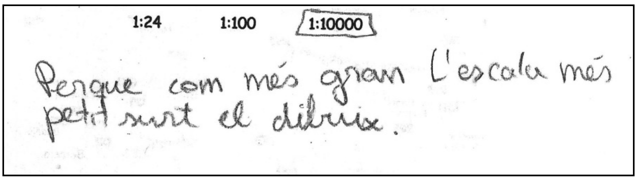

Figura 3. Categoria d'índole qualitativa, justificació incorrecta.

Això no obstant, utilitzant el mateix raonament d'índole qualitativa, un estudiant descarta l'escala 1:10000 i dóna una justificació parcialment correcta (figura 4):

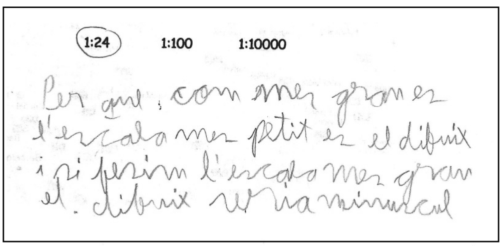

Figura 4. Categoria d'índole qualitativa, justificació parcialment correcta.

Un altre tipus de raonament que s'observa tant en les evidències dels estudiants de primària (figura 5) com dels futurs mestres (figura 6) està lligat a la idea que als estudiants els agrada treballar amb nombres naturals o bé que les divisions siguin exactes. Alguns d'ells han triat l'escala 1:100 perquè d'aquesta manera cada centímetre del paper representa exactament 100 cm de la realitat; en canvi, si trien l'escala 1:24, han de treballar amb decimals.

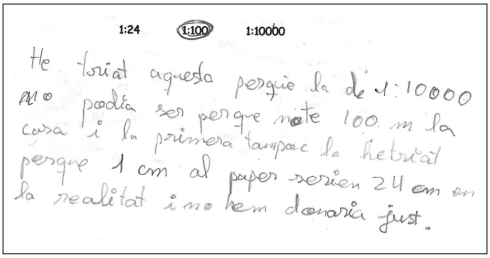
1:24 1:100 1:10000
He triat aquesta perquè la de 1:10000 no podia ser perquè no te 100 m la casa i la primera tampoc la hetriat perquè 1 cm al paper serien 24 cm en la realitat i no hem donaria just.

Figura 5. Categoria naturalesa dels nombres i idea d'exactitud. Estudiant de 6è de primària.

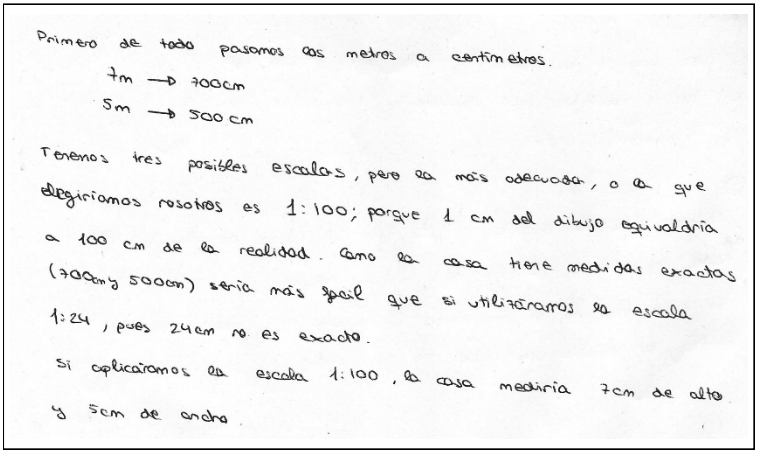
Primero de todo pasamos los metros a centimetros.
7m → 700cm
5m → 500 cm
Tenemos tres posibles escalas, pero la más adecuada, o la que elegiríamos nosotros es 1:100; porque 1 cm del dibujo equivaldría a 100 cm de la realidad. Como la casa tiene medidas exactas (700cm y 500cm) sería más fácil que si utilizáramos la escala 1:24, pues 24cm no es exacto.
Si aplicáramos la escala 1:100, la casa mediría 7cm de alto y 5cm de ancho

Figura 6. Categoria naturalesa dels nombres i idea d'exactitud. Estudiants de grau.

En la figura 7 es pot veure que un dels grups d'estudiants del doble grau dóna un argument tenint en compte la naturalesa dels nombres, però afegeix que també utilitzaria l'escala 1:100 perquè, si utilitzés les altres dues, la representació seria molt petita o molt gran.

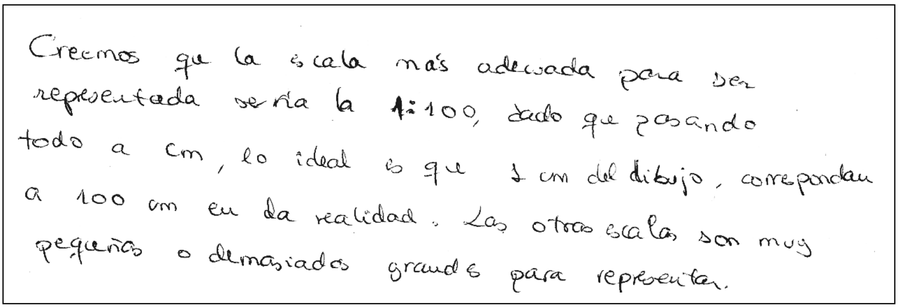
Creemos que la escala más adecuada para ser representada sería la 1:100, dado que pasando todo a cm, lo ideal es que 1 cm del dibujo, correspondan a 100 cm en la realidad. Las otras escalas son muy pequeñas o demasiados grandes para representar.

Figura 7. Categoria naturalesa dels nombres i idea d'exactitud. Índole qualitativa.

Un altre tipus d'argument que donen tant per justificar l'elecció de l'escala 1:24 com de l'escala 1:100 és que «cap al full», però en les respostes no inclouen cap càlcul (figura 8).

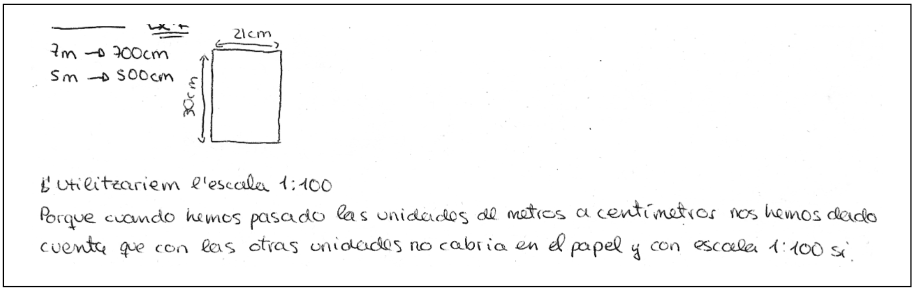

Figura 8. Categoria dimensions DIN A4. Justificació incorrecta. Estudiants de grau.

A la resposta de la figura 8 es pot observar que la justificació que donen és incorrecta i és conseqüència o bé d'haver mesurat erròniament la llargada i l'amplada del DIN A4 o bé d'haver aproximat incorrectament les mides de la casa dibuixada a escala 1:24. A més a més, confonen «unitats» amb «escala».

En la resposta següent (figura 9), l'estudiant de primària no només fa un raonament totalment erroni, sinó que també mostra un error conceptual respecte al perímetre: argumenta que l'escala es troba fent el doble del perímetre de la figura real i, a més a més, per trobar el perímetre només suma dos dels costats de la figura. Aquesta suma dóna 12 i justament és la meitat de 24 (1:24). Amb aquesta informació no podem afirmar que l'estudiant sempre trobaria l'escala segons el raonament que ha donat, ja que també ha pogut buscar simplement una relació entre els nombres de la pregunta. Tot i això, pensem que aquest raonament té relació amb el fet d'haver mesurat el perímetre en l'activitat d'ampliar figures.

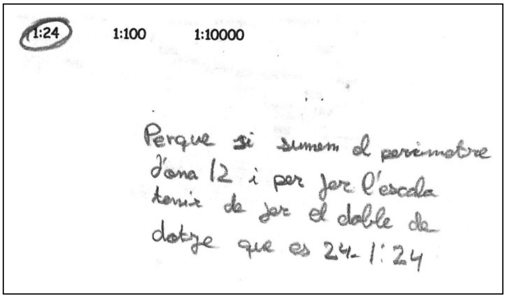

Figura 9. Categoria altres. Errors conceptuals.

Cal destacar que en cap de les respostes dels alumnes de primària es pot veure com han calculat les dimensions de les representacions a escala. Pel tipus de raonaments que han fet es dedueix que:

- No han fet cap mena de càlcul.
- Si han fet alguna mena de càlcul:
  - Respecte a l'escala 1:100, mentalment.

- Respecte a l'escala 1:24, han vist que 100 no és divisible per 24 i/o han utilitzat la calculadora.
- Respecte a l'escala 1:10.000, mentalment o no n'han fet cap.

Alguns dels futurs mestres han utilitzat els factors de conversió i la definició d'escala per raonar les seves respostes, però també s'observa que cap dels grups ha calculat quines serien les dimensions de la casa segons l'escala 1:10.000.

Pel que fa al nivell d'assoliment de competència dels estudiants de primària, es pot dividir en dos grups diferenciats: per un costat, s'identifica un conjunt nombrós d'alumnes que han elegit una escala incorrecta o bé que l'escala és correcta, però no fan un raonament correcte. La majoria dels arguments que fan són d'índole qualitativa. El nivell de competència de la resta de nens i nenes és més elevat, ja que donen una solució correcta i una explicació parcialment correcta, tot i que no acompanyen les justificacions amb càlculs. El tipus de raonament que fan seria el de la naturalesa dels nombres i idea d'exactitud o bé el de les dimensions del DIN A4. D'aquest grup també es pot destacar que, en la majoria de les respostes, es dedueix que alguns dels estudiants han pensat en la possibilitat que hi hagi més d'una resposta correcta, però trien la que els sembla més raonable. Això no obstant, s'observa que els estudiants d'aquest grup entenen el concepte d'escala i saben com calcular les dimensions d'una reproducció feta a escala.

Respecte als estudiants de grau que han triat una possible solució correcta, també es detecten bàsicament dos nivells d'assoliment de la competència: el que correspon a aquells que només han justificat una sola opció i el que correspon als que, en les seves respostes, argumenten sobre «l'escala més adequada», és a dir, s'intueix que tenen en compte més d'una solució correcta, encara que no s'observa explícitament cap discussió respecte a les altres escales. Tot i això, cal destacar la justificació d'un dels grups dels futurs mestres, que dóna una resposta no vàlida perquè són els únics que calculen correctament les dimensions de la representació segons les tres escales, però conclouen erròniament a causa de no arrodonir bé els decimals i no ser acurats en el llenguatge matemàtic.

En les autoregulacions dels errors dels futurs mestres, ells mateixos consideren que no haver pensat en la possibilitat de més d'una resposta és conseqüència de la seva falta de comprensió lectora.

En definitiva, la majoria dels estudiants de l'escola i de la universitat han sabut interpretar el concepte d'escala, però no han estat capaços de comprovar si totes les opcions eren correctes matemàticament ni d'argumentar si eren o no raonables.

Conclusions

La similitud en els raonaments dels dos tipus d'estudiantat, que en el cas de la universitat són estudiants de diferents indrets del país, ens fa reafirmar en la convicció que almenys la proporcionalitat geomètrica s'ha treballat poc a les escoles i als instituts i, en conseqüència, que molts dels futurs mestres no tenen desenvolupat ni un bon raonament espacial ni proporcional, essent aquest últim essencial per arribar a desenvolupar el raonament formal (Inhelder i Piaget, 1996). Per tant, pensem que des de l'escola s'han de fer activitats, d'una banda, més significatives i transversals i, de l'altra, menys algorítmiques pel que fa al treball de la proporcionalitat. Encara que el nivell competencial dels escolars amb qui hem dut a terme l'experiència no és gaire alt, pensem que això es deu al fet que es troben a l'inici del desenvolupament del raonament proporcional i que la proposta didàctica que hem presentat és un bon exemple a seguir per d'altres mestres a les escoles i instituts. S'ha de tenir present que el raonament proporcional es comença a treballar a primària, però que és un contingut clau del currículum de secundària.

Com a reflexió final, pensem que l'aplicació de l'espiral de Wells en un context d'avaluació formadora ha enriquit el procés d'ensenyament i aprenentatge, però que els estudiants per a mestre no tenen un nivell desitjable quant a resolució de problemes. Això ens fa replantejar l'experiència fins al punt d'introduir un canvi en les activitats corresponents a cada fase de l'espiral: pensem que una proposta de millora seria començar la fase de la nova formació per la pregunta que els vam plantejar, en lloc de començar per la instrucció. Això no obstant, creiem fermament que l'avaluació formadora ha ajudat a regular sobretot els errors dels mestres en formació.

Pel que fa a la metodologia seguida a l'escola, hem observat que facilita l'atenció a la diversitat, perquè, malgrat que no arribin a un cert nivell de comprensió del concepte, tots poden participar de les activitats i se'n senten part activa. Presentar les activitats a partir d'una bona pregunta, de simular que han de descobrir quelcom per explicar als altres (pot ser als companys de l'altre curs, a la pàgina web o elaborant un petit informe), és una bona manera de motivar i d'aprendre.

Segurament, la proporcionalitat geomètrica es treballa a l'escola, però pot ser que no se'n sigui prou conscient. El fet de reflexionar i de prendre consciència ens ha d'ajudar a millorar si ja es treballa o a introduir el tema quan s'ha d'encetar.

Referències

Buforn, À., Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema*, 28(48), 21-41.

Fernández, C., Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-142.

Fiol, M.L., Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

Inhelder, B., Piaget, J. (1996*). De la lógica del niño a la lógica del adolescente: ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Barcelona: Paidós.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: toward a theorical framework. Dins F. K. Lester (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (p. 629-667). Charlotte: Information Age Publishing.

Quintero, A.L., Molavoque, M.J., Guacaneme, E. A. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de Ciencias*, 16, 75-85.

Sanmartí, N. (2007). *10 ideas clave. Evaluar para aprender*. Barcelona: Graó.

Wells, G. (2004). El papel de la actividad en el desarrollo y la educación. *Infancia y Aprendizaje*, 27(2), 165-187.